

הסתברות וסטטיסטיקה

פרק 12 - דיאגרמת עצים - נוסחת ביס ונוסחת ההסתברות השלמה

תוכן העניינים

1. כללי

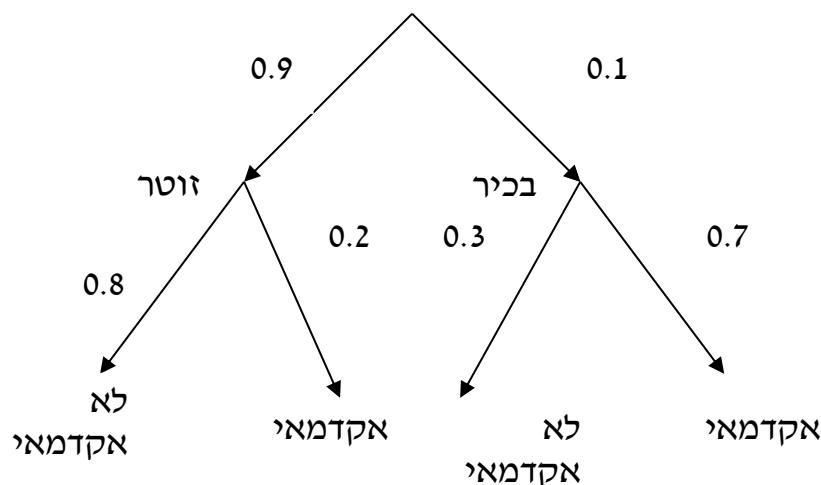
דיאגרמת עצים – נוסחת הסתברות השלמה:

ركע:

נשותמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשויות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלולה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמיים ומ בין הזוטרים 20% הם אקדמיים. נشرط עז שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העז אינו מותנה בכללם ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל הסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

- (1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמי ? $0.1 \cdot 0.7 = 0.07$.
- (2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמי ? $0.72 = 0.9 \cdot 0.8$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף
(רק אחרי שבתווך הענף הכפלו את הסתברויות).

- (3) מה הסיכוי שהוא אקדמי ? $0.25 = 0.1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2$.
 - (4) נבחר אקדמי מה הסתברות שהוא עובד זוטר?
- מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות
モותנה:

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B , מאורע כלשהו, וחלוקת של מרחב המדגם Ω ל- A_1, \dots, A_n כך ש- $\Omega = \bigcup_i A_i$,

$$\text{אזי: } P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)$$

נוסחת בייס:

$$\cdot P\left(\frac{A_j}{B}\right) = \frac{P(A_j)P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$$

שאלות:

- 1)** בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוצאים באקראי סוכריה.
אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוצאים סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מוחזרים אותה לשקית ומוצאים סוכריה נוספת.
א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?
- 2)** באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשיים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת משך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת משך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת משך החורף הוא 70%.
א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשיים שלא יחלו בשפעת משך החורף?
ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת משך החורף?
ג. נבחר אדם שחלה משך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת משך החורף?
- 3)** בצד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בצד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוצאים ממנו כדור ומבליל להחזירו מוצאים כדור נוסף.
א. מה ההסתברות שני ה כדורים שייצאו יהיו בצבעים שונים?
ב. אם ה כדורים שהווצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהווצה יהיה בצבע אדום?
- 4)** חברת סלולר מסוגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מה לקוחות בני נוער, 70% מה לקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מוחזקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מוחזקים בסמארט-פון.
א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
ב. נבחר לקוח אקראי ונטען שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיון?
ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

- (5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, ככלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו. 70% מהמטופדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.
- מה ההסתברות להתקבל לעבודה?
 - מועד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?
 - מועד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?
- (6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
- מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולמים בשפעת בזמן החורף.
מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולמים בשפעת בזמן החורף.
30% מההתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשיים.
כמו כן נתון ש68% מהאוכלוסייה חלה בשפעת בחורף.
- מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?
 - נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?
- (7) רצאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1-4 האזוריים : A, B, C, D, E.
אם האנייה נמצאת באזור A הרצאר מזזה אותה בסיכון 0.8, סיכון זה פוחת ב-0.1 כל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכון 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.
- מה הסיכון שהאנייה מתגלה ע"י הרצאר?
 - אם האנייה התגלתה ע"י הרצאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?
 - אם האנייה התגלתה ע"י הרצאר, מה הסיכון שהיא לא נמצאת באזור B?
- (8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובಹסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במקרים הללו, אדם לא יכול לחלות בגין מחלת אחת מבין המחלות הללו. קליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולמים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכון של 80%, ובמחלות C, B הסימפטום מתגלה בסיכון של 90% בכל מחלת.
- מה ההסתברות שאדם הגיעו קליניקה וגילה אצלו את סימפטום X?
 - אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
 - אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
 - אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9) סטודנט ניגש לבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא P , ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מוחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות.
אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

10) אדם משחק נגד שני מתמודדים, רוניית ודולב. האדם צריך לשחק שלושה משחקים ויש לו לבחור איזה סדר משחקים עדיף לו :

- Dolb, Ronit, Dolb.
- Ronit, Dolb, Ronit.

בכל משחק מישחו חיבר לנצח(אין תיקו). האדם ינצח בטורניר רק אם ינצח בשני משחקים ברציפות. נתון ש דולב שחקן טוב יותר מאשר רוניית.
איזה אפשרות עדיפה יותר על האדם כדי לנצח בטורניר?

תשובות סופיות:

.0.2 .ד	.0.241 .ג	.58% .ב	.6% .א	(1)
		.0.5 .ב	.0.544 .א	(2)
	.0.9722 .ג	.0.09375 .ב	.9% .א	(3)
	.0.2442 .ג	.0.3488 .ב	.0.14 .א	(4)
		.0.8125 .ב	.70% .א	(5)
	.0.7543 .ג	.0.3158 .ב	.0.57 .א	(6)
.0.8778 .ד	.0.3137 .ג	.0.2889 .ב	.0.0886 .א	(7)
			$\cdot \frac{kp}{1 + p(k-1)}$	(8)
				(9)
				(10)